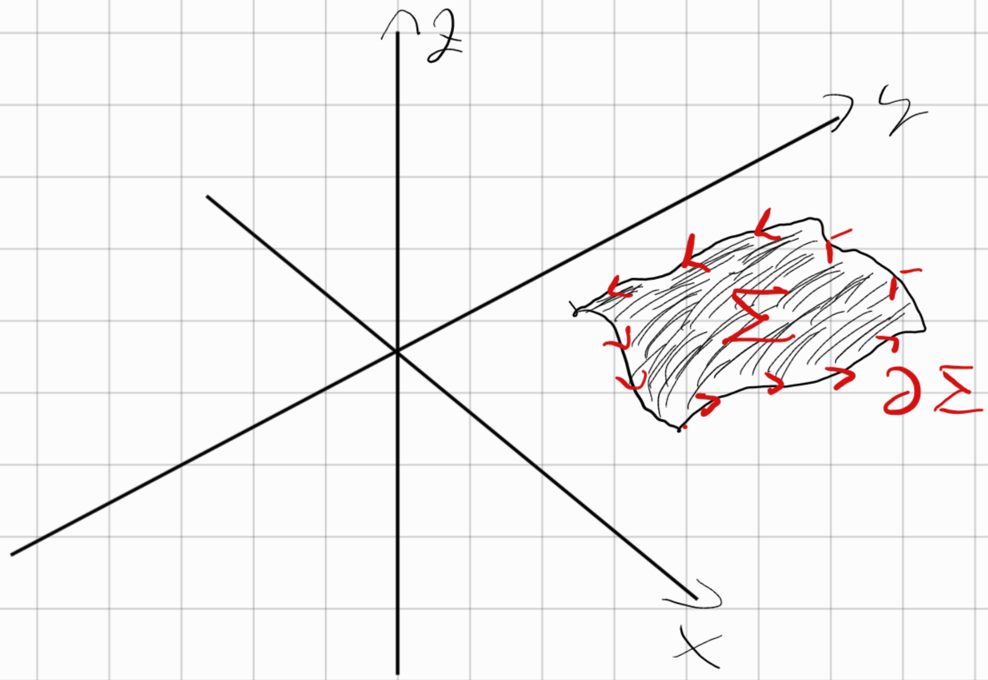
Stokes Teorem

Anta Σ er en stykkevis glatt positivt orientert overflate i $\mathbb{R}^3$ med randkurve $\partial\Sigma$.
La $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte.
Da har vi

Tangent enhetsvektor

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial\Sigma} (F \cdot T) \, dr$$

Illustrasjon



Merk at Greens teorem

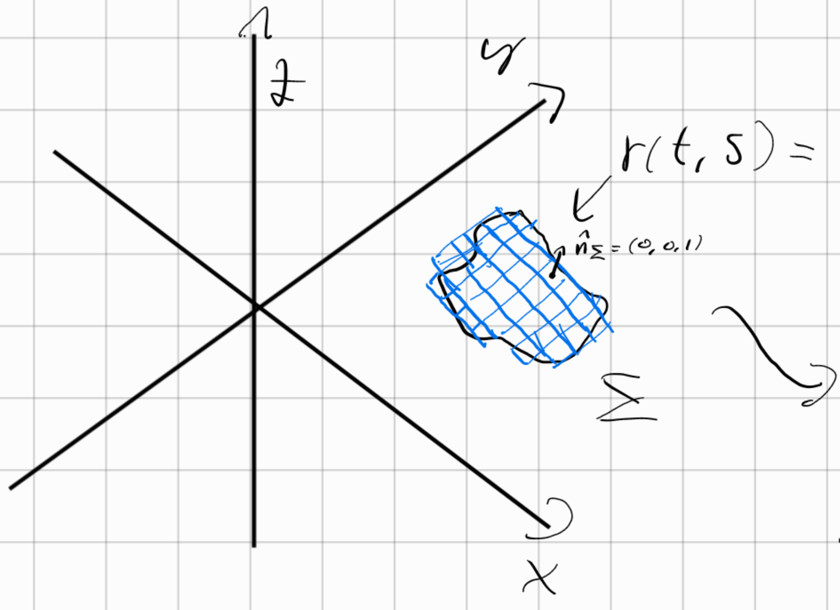
$$\iint_{A} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial A} F \cdot T \, dS$$

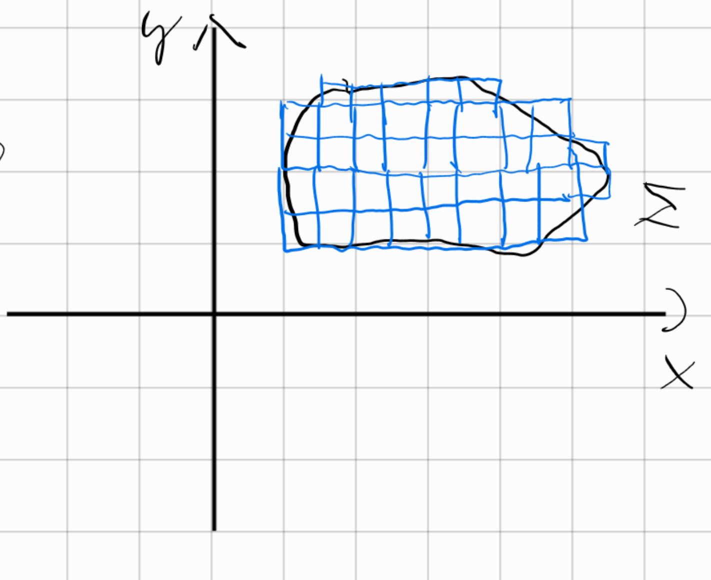
Kommer av å velge Σ som en flate i xy-planet. Stokes teorem kan derfor anses som en generalisering av Greens teorem til mer generelle flater i $\mathbb{R}^3$

Intuisjon for Stokes teorem.

Intuisjonen for Stokes teorem ved bruk av sirkulasjon, handler om at alle interne sirkulasjoner på små inndelinger av overflaten kansellerer og resultatet blir sirkulasjonen på randen.

Vi demonstrer dette ved det 2-dimensjonelle tilfellet (Greens teorem) fordi det er enklere å tegne :)



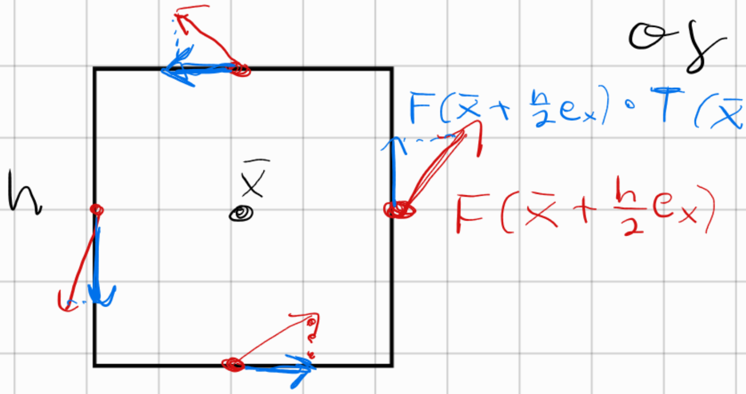


Sirkulasjon er definert ved

$$\text{Sirk}(A) = \oint_{\partial A} F \cdot T \, dr$$

Her integreres den tangentielle komponenten av vektorfeltet over randkurven, og kan tekes som vektorfeltets tendens til å følge kurven. Siden kurven er lukket, blir dette en sirkulasjon.

Betrakt et kvadrat med sidelengde h og sentrum $\bar{x} \in \Sigma \subset \mathbb{R}^2$



Sirkulasjonen blir tilnærmet

$$\text{Sirk} = \left(F(\bar{x} + \tfrac{h}{2}\hat{e}_x) \cdot (0,1) + F(\bar{x} - \tfrac{h}{2}\hat{e}_x) \cdot (0,-1) \right) h$$

$$+ \left(F(\bar{x} + \tfrac{h}{2}\hat{e}_y) \cdot (-1,0) + F(\bar{x} - \tfrac{h}{2}\hat{e}_y) \cdot (1,0) \right)$$

$$= h^2 \left(\frac{F_1(\bar{x} + \frac{h}{2}\hat{e}_x) - F_1(\bar{x} - \frac{h}{2}\hat{e}_x)}{h} \right)$$

$$+ h^2 \left(\frac{-F_2(\bar{x} + \frac{h}{2}\hat{e}_y) + F_2(\bar{x} - \frac{h}{2}\hat{e}_y)}{h} \right)$$

For liten h får vi siden F er deriverbar

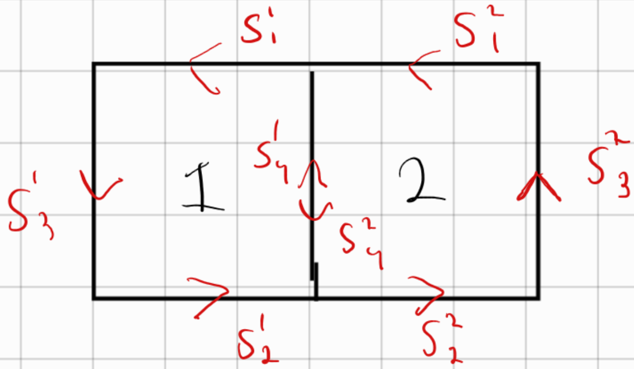
$$\text{Sirk} \approx h^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$

$$= h^2\left(\left(\nabla \times \left((F_1, F_2, 0)\right)\right) \cdot (0,0,1)\right)$$

$$= \Delta A \, (\nabla \times F) \cdot \hat{n}_\Sigma$$

Skriver ΔA for å generalisere

Hva skjer om vi setter sammen slike kvadrater.



$$\text{Sirk}_{tot} = (S^1_1 + S^1_2 + S^1_3) + (S^2_1 + S^2_2 + S^2_3)$$

$$= (S^1_1 + S^1_2 + S^1_3 + S^1_4) + (S^2_1 + S^2_2 + S^2_3 + S^2_4)$$

$$= \text{Sirk}_1 + \text{Sirk}_2$$

Sum av sirkulasjon av kvadrat 1 og 2 sett på hver for seg.

Generelt ser vi da at for n kvadrater satt sammen, vil total sirkulasjon være summen av sirkulasjonene for hvert kvadrat sett på isolert.

Dermed om vi ser tilbake til inndelingen av Σ i figuren ovenfor.

$$\text{Sirk}(\Sigma) \approx \sum_{i=1}^{n} \text{Sirk}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta A (\nabla \times F) \cdot \hat{n}$$

Når $h \to 0$ og $n \to \infty$ slik at vi får en Riemannsum, får vi

$$\text{Sirk}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, dS$$

Men ved definisjon av sirkulasjon har vi og

$$\text{Sirk}(\Sigma) = \oint_{\partial\Sigma} F \cdot T \, dr$$

Dermed har vi Stokesteorem

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, dS = \oint_{\partial\Sigma} F \cdot T \, dr$$

Sirkulasjonsfritt impliserer Konservativt

Def: "Konservativt felt"

Et vektorfelt er konservativt dersom $F = \nabla \phi$ for en skalar funksjon ϕ.

Def: "Sirkulasjonsfritt"

$\nabla \times F = 0 \quad \forall x$

Anta vi har $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ og en lukket stykkevis glatt kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^3$.
Anta Σ er en flate med $\gamma = \partial \Sigma$.

Ved Stokes får vi

$$\oint_\gamma F \cdot T \, dr = \iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, dS$$

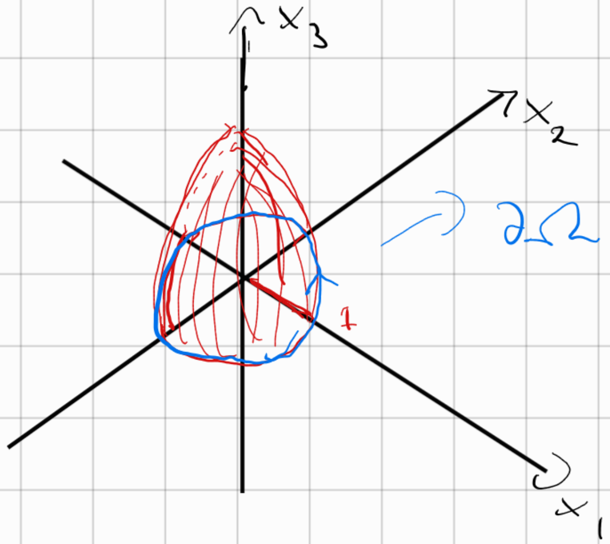
$$= \iint_\Sigma 0 \, dS$$

$$= 0$$

Siden dette gjelder enhver slik kurve γ, er F et konservativt felt.

Eksempler

La Ω være den delen av ellipsoiden $x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{x_3 - 1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2 = 9$ hvor $x_3 \geq 0$



$\partial\Omega: r(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$

$t \in [0, 2\pi)$

La $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 x_3 - 5x_2^3 \cos x_3,\ 5x_1^3 e^{x_3},\ 6x_1 x_2 e^{|x|^2}\right)$$

Regn ut $\iint_\Omega (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS$

Løsning:

Bare en masokist gidder prøve på dette direkte, så vi bruker Stokes.

$$\iint_\Omega (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_{\partial\Omega} F \cdot T\, dr$$

Merk at

$$F(r(t)) = \left(-5 \cdot \sin^3(t),\ 5 \cdot \cos^3 t,\ 6 \sin(t)\cos(t) e\right)$$

$$= \left(-5 \cdot \sin^3(t),\ 5 \cdot \cos^3 t,\ 3 \sin(2t) e\right)$$

Det gir

$$\iint_{\Omega} (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-5\sin^3 t, 5\cos^3 t) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt$$

$$= 5 \int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t\, dt$$

$$= 10 \int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt$$

$$= \frac{10}{4} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2(2t) + 2\cos(2t) + 1\right) dt$$

$$= \frac{10}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(2t)\, dt + 5\pi$$

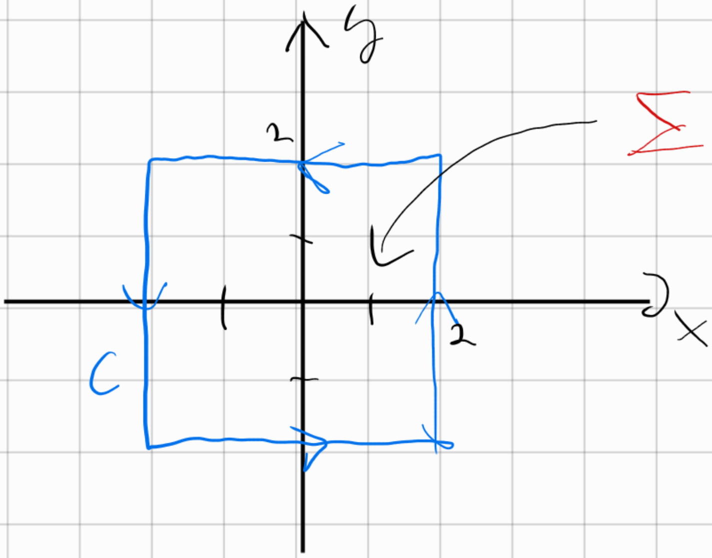
$$= \frac{5}{4} \int_0^{2\pi} \cos(4t) + 1\, dt + 5\pi = \boxed{\frac{15}{2}\pi}$$

Oppgave 2

Regn ut $\int_C (F \cdot T)\, dr$ når

$$F = \left(\tfrac{1}{2}(y^2+z^2),\ \tfrac{1}{2}(x^2+y^2),\ \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

og C er kvadratet i xy planet avgrenset av $x = \pm 2$ og $y = \pm 2$



Løsning

Vi har $\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right),\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right) \right)$$

$= (y, -x+z, x-y)$

Merk at $\partial\Sigma = C$ hvor Σ er flaten i xy planet avgrenset av $x = \pm 1$ og $y = \pm 1$

Ved stokes får vi

$$\int_C F \cdot T \, dr = \iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, dS$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (y, -x+0, x-y) \cdot \hat{e}_z \, dS$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (x-y) \, dx dy \boxed{= 0}$$

Merk at vi valgte Σ fordi dette var en simpel flate. Vi kunne valgt noe mer eksotisk også.

$\boxed{6}$

Regn ut $\int_C F \cdot T \, dr$ når

$F(x,y,z) = (xe^{z^2}, x+yz, 1)$ og C er skjæringskurven mellom flaten $x^2+y^2+z^3=3$ og kjegleflaten $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

C er positivt orientert sett ovenfra

Løsning

Viser først at C ligger i planet $z=1$. For skjæringskurven C får vi

$$x^2+y^2+z^3-3 = -2z + x^2+y^2$$

$$\Rightarrow z^3+2z-3 = 0$$

$$(z-1)\underbrace{(z^2+z+3)} = 0$$

$\hookrightarrow$ gativ diskriminant
Bare reell løsning $z=1$

$\Rightarrow$ $z=1$ på kurven C.

Dermed er C gitt ved $\frac{x^2+y^2}{2}=1$

$$\Rightarrow x^2+y^2=2$$

Vi kan dermed bruke $\Sigma = D(0, \sqrt{2})$
disken med radius $\sqrt{2}$.
Da har vi $\partial \Sigma = C$

Stokes gir at

$$\oint_C F \cdot T \, dr = \iint_\Sigma \nabla \times F \cdot (0,0,1) \, dS$$

$$= \iint_\Sigma \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dS$$

$$= \iint_\Sigma dS = (\sqrt{2})^2 \pi = \underline{\underline{2\pi}}$$