

8)

La $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, og anta $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ er harmonisk. Da har vi

$$(i) \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(ii) Hvis Ω er sammenhengende og det finnes $x_0 \in \Omega$ slik at

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$$

Da er u konstant.

Bevis av (ii). (i) følger trivielt fra (ii)

Anta at det finnes $x_0 \in \Omega$ slik at $u(x_0) = M = \max_{\bar{\Omega}} u$

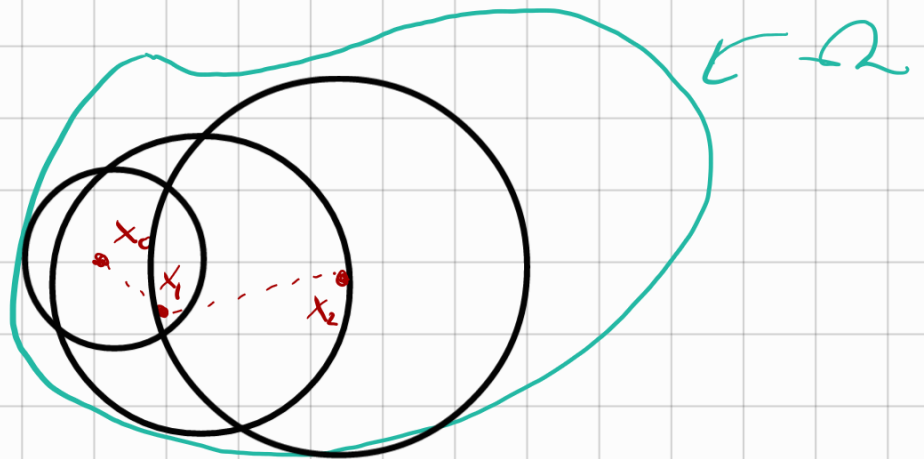
Da har vi for $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ ved middelverdisetningen

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u \, dV \leq M$$

↑
siden integralet gir gjennomsnitt av verdier $\leq M$.

Likhet holder bare hvis $u = M$
i $B(x_0, r)$

Siden Ω er sammenhengende
og vi kan gjenta dette argumentet
ved å velge en $x_1 \in B(x_0, r)$, osv
får vi at $u =$ i hele Ω .



↑
viser hvordan du kan dekke
hele Ω ved å gjenta
argumentet.

Man kan enklere konkludere med
at $u = M$ i Ω ved å bemerke
at mengden

$$S = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$$

er lukket siden u er kontinuerlig
er ikke-tom ved antagelsen
og er åpen siden for alle $x \in S$
kan vi finne $B(x, r) \subset S$ som uestover.

Dermed må $\Gamma = \Omega$ siden Ω er sammenhengende.



Ved å sette $u \rightarrow -u$ og bruke maksimumsprinsippet, kan vi få et minimumsprinsipp for harmoniske funksjoner.

5

Vis at for et område Ω og en randbetingelse $u|_{\partial\Omega} = g$

Så er det den entydige harmoniske funksjonen som minimerer energien blant funksjoner $v \in C^2(\bar{\Omega})$

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

Bevis

Anta v minimerer $E(v)$.

La $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ og $t \in \mathbb{R}$

Definer $K(t) = E(v + t\phi)$.

Da har vi $K(0) \geq K(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Som gir oss

$$K'(t) = 0 \quad \text{for } t = 0 \quad \text{Toppunkt}$$

$$\text{Siden } |\nabla(v + t\phi)|^2 = \langle v + t\phi, v + t\phi \rangle$$

er kontinuerlig i x og t , og siden den deriveres mhp t også er kontinuerlig, kan vi derivere under integrasjon

$$K'(t) = \frac{d}{dt} E(v + t\phi)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \nabla(v + t\phi), \nabla(v + t\phi) \rangle dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\langle \nabla(v + t\phi), \nabla(v + t\phi) \rangle) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2 \langle \nabla\phi, \nabla(v + t\phi) \rangle dx$$

$$= \int_{\Omega} \langle \nabla\phi, \nabla(v + t\phi) \rangle dx$$

ved å bruke at $k'(0) = c$
har vi

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla \phi, \nabla v \rangle dx$$

siden $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$= 0$

$\downarrow$

$$\Downarrow \int_{\Omega} v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial \Omega} v \nabla u \cdot ds$$

$$= - \int_{\Omega} \phi \Delta v dx$$

Siden dette gjelder for
alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, har vi at
 $\Delta v = 0$, så v er harmonisk.

v oppfyller da

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{i } \Omega \\ v|_{\partial \Omega} = g & \text{på } \partial \Omega \end{cases}$$

Vi vet denne er unik.



Alternativt bevis for at
løsningen til

$$(*) \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{i } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = g & \text{på } \partial\Omega \quad g \in C^1 \end{cases}$$

har en unik løsning hvis den
findes.

Bevis

Antag vi har to løsninger til $(*)$
 u og $\tilde{u}$.

Definer $w = u - \tilde{u}$

Da løser w

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{i } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Det giver

$$w = 0 \text{ på } \partial\Omega$$

↓

$$0 = - \int_{\Omega} w \Delta w \, dx = \int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla w \rangle \, dx - \int_{\partial\Omega} w \nabla w \cdot ds$$

Altså

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla w \rangle dx = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$$

Så $\nabla w = 0$ i Ω . Altså konstant

Siden w er kontinuert i $\bar{\Omega}$ og $w|_{\partial\Omega} = 0$, har vi da $w = 0$ i Ω

Det giver $u = \tilde{u}$, så løsningen til (*) er unik!



oppgave

La u være harmonisk i $\mathbb{R}^3$
slik at

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 d^3x < \infty$$

vis at $u = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

Bevis

Vi bruker middelverdi formelen
for et vilkårlig punkt $x \in \mathbb{R}^3$.

$$u(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{B(x,r)} u(y) d^3y$$

Detta holder for alle $r > 0$

Videre har vi

$$|u(x)| = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \left| \int_{B(x,r)} 1 \cdot u(y) d^3y \right|$$

Merk att $\langle f, g \rangle = \int_{B(x,r)} f g d^3x$ är
ett inreprodukt

$$\text{Det ger } \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{B(x,r)} f^2 d^3x \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bräcker Cauchy-Schwarz. $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

$$\leq \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sqrt{\frac{4}{3}\pi r^3} \left(\int_{B(x,r)} u(y)^2 d^3y \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi r^3}} \sqrt{M} \quad \text{siden } B(x,r) \subset \mathbb{R}^3$$

La $r \rightarrow \infty$. Då får vi
att högerleden går mot 0

Dermed har vi $u(x) = 0$

siden $x \in \mathbb{R}^3$ är vilkårlig, får
vi $u = 0$



Liouville's Theorem

Anta at $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er harmonisk
og at $u(x) < M \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$
for $M \in \mathbb{R}$.

Da har vi at u er en konstant.

Bevis

Først bemærker vi at u_{x_j} er harmonisk.

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

$\Downarrow \frac{\partial}{\partial x_j}$ differentierer med hensyn på x_j

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i x_j} = 0 = \sum_{i=1}^n (u_{x_j})_{x_i x_i}$$

Så u_{x_j} er harmonisk i $\mathbb{R}^3$.

Velg en vilkårlig $x \in \mathbb{R}^3$
og $r > 0$. Ved middelværdisætningen
har vi da.

$$u_{x_j}(x) = \frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}} \int_{B(x,r)} u_{x_j}(y) d^3 y$$

Brüker delvisintegrasjon

$$= \frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \hat{e}_j \cdot \hat{n} dS$$

Dermed

$$|u_{x_j}| \leq \frac{3}{4\pi r^3} \int_{\partial B(x,r)} |u(y)| dS$$

$$\leq \frac{3}{4\pi r^3} M \cdot 4\pi r^2$$

$$= \frac{3M}{r} \rightarrow 0 \quad \text{når } r \rightarrow \infty$$

Dermed må $u_{x_j}(x) = 0$

Siden vi kan velge enhver $r > 0$

Dermed $u_{x_j} = 0$

$\Rightarrow$ u er konstant

~~MM~~

IBP

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d^n x = \int_{\partial \Omega} u v \hat{e}_i \cdot \hat{n} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d^n x$$