

ØVING UKE 8

Definisjon av gruppe:

En mengde $G \neq \emptyset$ utstyrt med en binær operasjon $*$: $G \times G \rightarrow G$ slik at

$$1) \quad a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$$

$$2) \quad \exists e \in G \text{ slik at } e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$$

$$3) \quad \forall a \in G \quad \exists a' \in G \text{ slik at}$$

$$a * a' = a' * a = e$$

$\exists$ "Det finnes"

$\forall$ "For alle"

Generatoren

De cykliske grupperne $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

med addisjon mod n .

Viser at dette er en gruppe.

Beweis

Siden $n \geq 1$, $G \neq \emptyset$.

Gitt $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

Har vi for addisjon i $\mathbb{Z}$ at

$$a+b = n \cdot q + r, \quad 0 \leq r < n$$

Ved divisjonsalgoritmen

$$\text{Dermed } a+b \equiv r \pmod{n}$$

hvor $r \in \mathbb{Z}_n$.

Dermed er $\mathbb{Z}_n$ lukket under addisjon mod n .

Assosiativitet følger ved regneregler for vanlig addisjon.

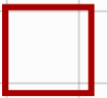
Neutralt element $0 \in \mathbb{Z}_n$.

Invers:

Gitt $a \in \mathbb{Z}_n$, har vi $n-a \in \mathbb{Z}_n$
og $a + (n-a) = 0$ i $\mathbb{Z}_n$.

Dermed har alle elementer en invers

Så $\mathbb{Z}_n$ er en gruppe



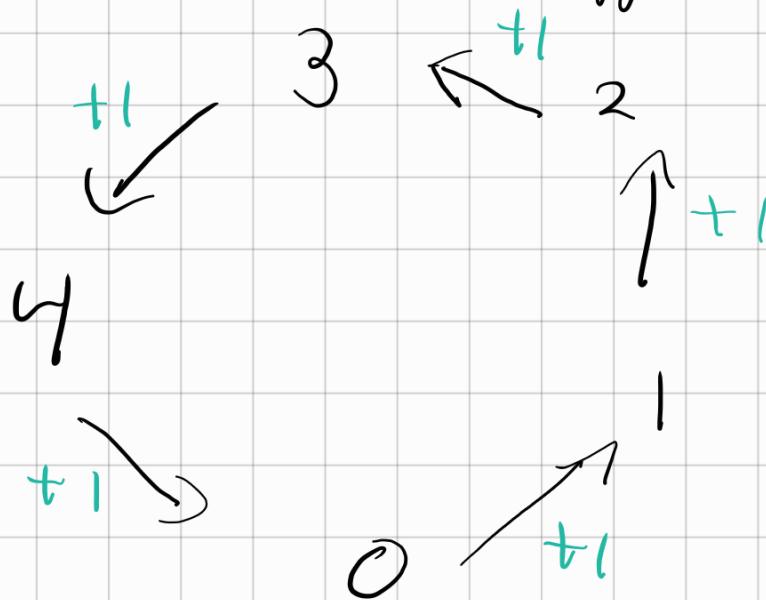
Merk at alle elementer i $\mathbb{Z}_n$
kan skrives som en sum

$m = \sum_{i=1}^m 1$. hvor vi betrakter
addisjon i $\mathbb{Z}_n$.

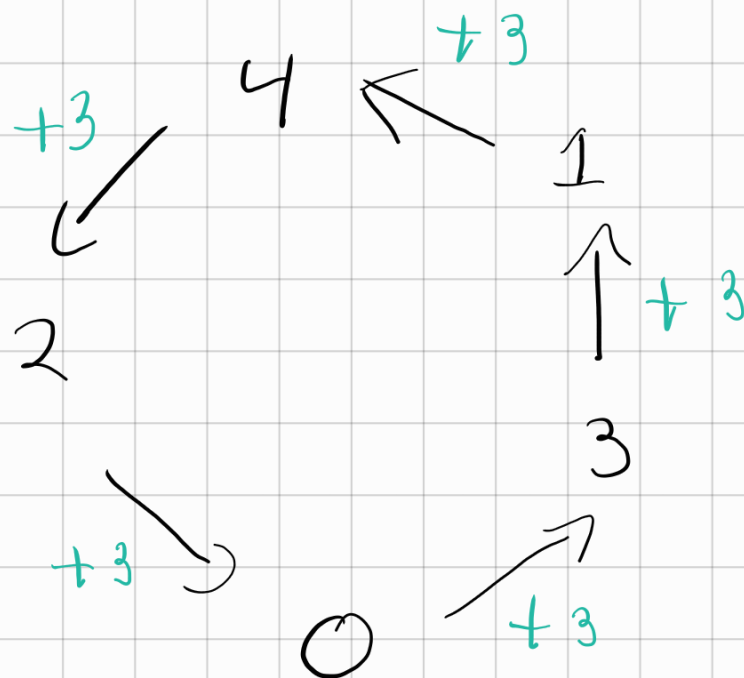
Vi sier da at 1 generer $\mathbb{Z}_n$.

Siden et enkelt element generer $\mathbb{Z}_n$,
kaller vi $\mathbb{Z}_n$ for en syklisk gruppe.

Betrakt for eksempel $\mathbb{Z}_5$
 Vi kan illustrere gruppa slik



Merk at også 3 genererer $\mathbb{Z}_5$

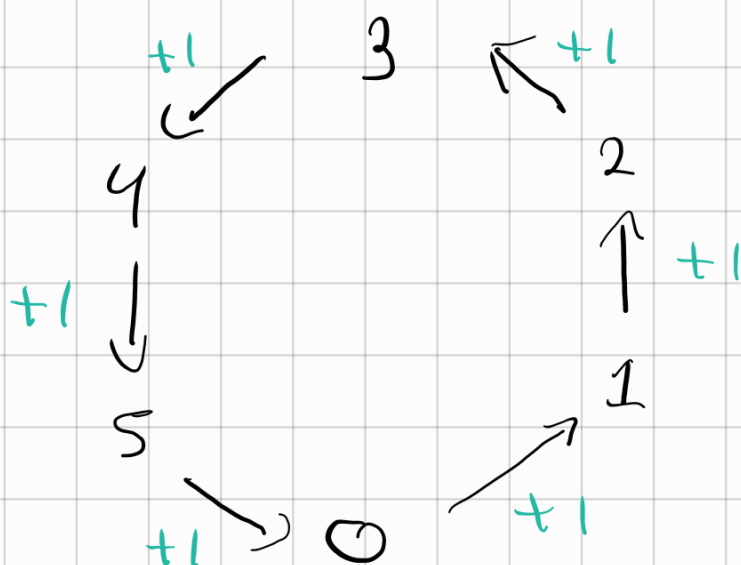


Man kan prøve å vise at for
 et primtall p , så har $\mathbb{Z}_p$
 $p-1$ generatoreer. Altså alle andre
 tall enn 0.

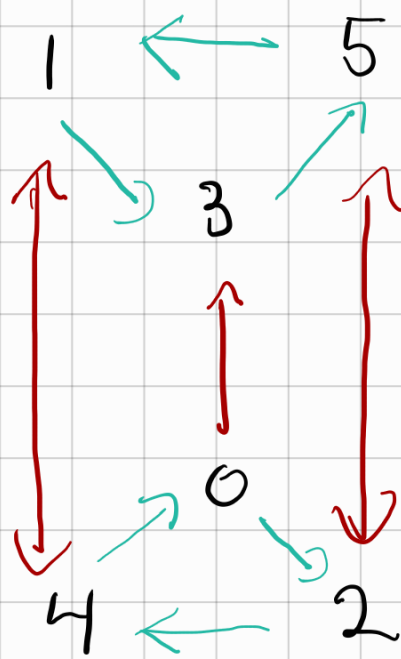
Diagrammene over kalles for Cayley digrafer. De beskriver en gruppestruktur grafisk via generatører.

Her er et eksempel på $\mathbb{Z}_6$

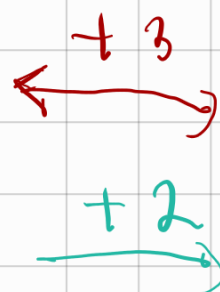
$\mathbb{Z}_6$ generert av 1



$\mathbb{Z}_6$ generert av 2 og 3



Altså



Generert Kaller i G en syklistisk gruppe dersom det finnes $a \in G$ slik at $G = \{ a^n : n \in \mathbb{Z} \}$

$$\text{hvor } a^n = \begin{cases} \overbrace{a * \dots * a}^n, & n > 0 \\ e & n = 0 \\ \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{|n|}, & n < 0 \end{cases}$$

Dermed er for eksempel $(\mathbb{Z}, +)$ generert av 1 med Cayley digraf

$$\dots \xrightarrow{+1} -2 \xrightarrow{+1} -1 \xrightarrow{+1} 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} \dots$$

La oss nå se på Multiplikasjonstabeller.

List opp alle elementene i en endelig gruppe G slik, $e, a_1, \dots, a_{n-1}$

* Kolonner tilsvarer høyre multiplikasjon

* Rader tilsvarer venstre multiplikasjon

Da blir elementet i rute (i, j)
 $a_i * a_j$

Altså slik

	e	a_1	a_2	a_3	$\dots$	∞
e	e	a_1	a_2	a_3	$\dots$	
a_1	a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$a_1 * a_3$		
a_2	a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$a_2 * a_3$		
a_3	a_3	$a_3 * a_1$	$a_3 * a_2$	$a_3 * a_3$		
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	
∞	∞					

Eksempel $(\mathbb{Z}_5, +)$

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Nå bruker vi dette til å finne alle grupper av orden 4 opp til isomorfi

Betrakt $(G, *)$

hvor $G = \{e, a, b, c\}$

Ser etter mulige multiplikasjonstabeller som oppfyller gruppeaksiomene

Vi trenger:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

Må finne muligheter for den grønne boksen.

(*) Merk at alle elementer i gruppen må framkomme i hver kolonne og rad (Siden inverser alltid finnes)

Dermed har vi at

$$a * a \neq a, \quad b * b \neq b, \quad c * c \neq c$$

Anta $a * a = e$.

Ved å bruke (*) ser man da at vi får

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(1)

Om vi antar $a * a = b$ får vi

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(2)

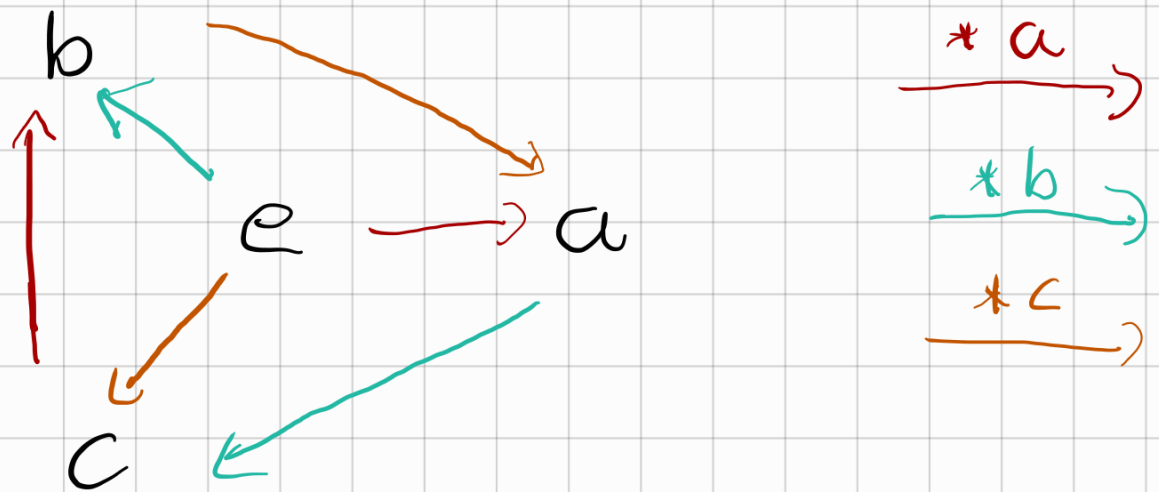
Siden rekkefølgen a, b, c er vilkårlig vil ikke $a * a = c$ gi en strukturert annertedes gruppe.

Dermed er (1) og (2) de eneste gruppene med 4 elementer.

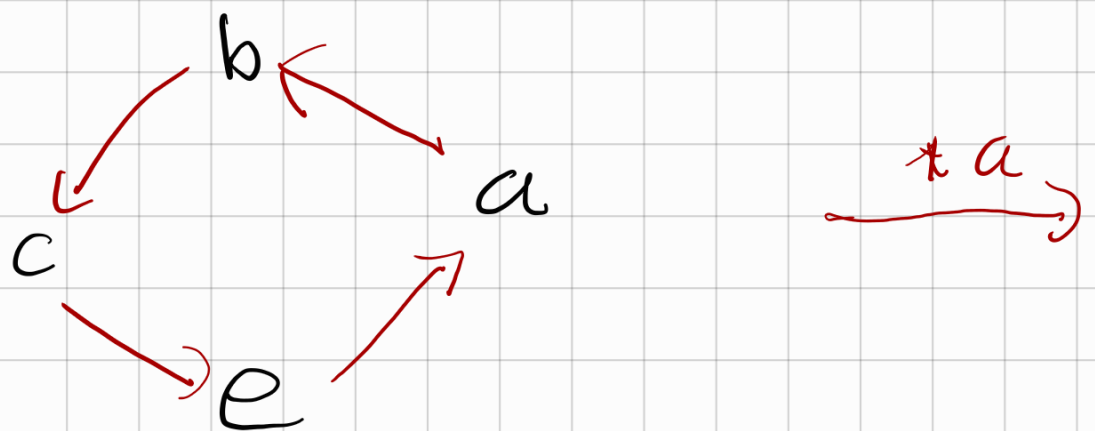
Merk at siden (1) og (2) er symmetriske om diagonalen, er dette kommutative/abelske grupper.

La oss lage Cayley digrafer av (1) og (2)

Cayley digraf av (1) generert av a, b, c



Cayley digraf av (2) generert av a



Vi ser at (2) er syklisk og generert av a .

Gruppeisomorfier

La $(G, *)$, $(H, \cdot)$ være grupper

Vi sier at G og H er isomorfe, som vi skriver $G \cong H$ dersom det finnes en funksjon $\phi: G \rightarrow H$ slik at:

1) ϕ er injektiv:

$$\forall a, b \in G \text{ har vi } \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow a = b$$

2) ϕ er surjektiv:

$$\forall \alpha \in H \text{ finnes } a \in G \text{ slik at } \phi(a) = \alpha.$$

3) Og $\forall a, b \in G \quad \phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$



Altså bevarer ϕ
gruppetrukturen
mellom $(G, *)$ og $(H, \cdot)$

ϕ kalles en isomorfi.

Merk at isomorfier er symmetriske relasjoner. Altså $G \cong H \Leftrightarrow H \cong G$



Her kommer noen eksempler

1) La oss kalle gruppa med multiplikasjons tabell (2) for $(G, *)$.

vis at $(G, *) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$

Beweis

Vi definerer $\phi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow G$

$$\text{ved } \begin{cases} \phi(0) = e \\ \phi(1) = a \\ \phi(2) = b \\ \phi(3) = c \end{cases}$$

Vi ser med en gang at ϕ er injektiv og surjektiv. (Alls 1 til 1)

Må nå vise $\phi(m+n) = \phi(m) * \phi(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_4$

vi ser at

$$\phi(0+m) = \phi(m) = e * \phi(m) = \phi(0) * \phi(m)$$

$$\phi(1+2) = \phi(3) = c = a * b = \phi(1) * \phi(2)$$

$$\phi(2+3) = \phi(1) = a = b * c = \phi(2) * \phi(3)$$

$$\phi(1+3) = \phi(0) = e = a * c = \phi(1) * \phi(3)$$

$$\begin{aligned}\phi(1+1) = \phi(3+3) = \phi(2) = b &= a * a = c * c \\ &= \phi(1) * \phi(1) = \phi(3) * \phi(3)\end{aligned}$$

$$\phi(2+2) = \phi(0) = e = b * b = \phi(2) * \phi(2)$$

Så ϕ er en isomaffi mellem G
 $\subset \mathbb{Z}_4$. □

oppgave

Vis at om $(G, *)$ er en cyklisk gruppe av orden n , så er

$$G \simeq \mathbb{Z}_n.$$

Bevis

Siden G er cyklisk finnes en generator $a \in G$ slik at

$$\begin{aligned}G &= \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \\ &= \{a^m : m \in \mathbb{Z}_n\}\end{aligned}$$

Definer $\phi: \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ ved

$$\phi(m) = a^m$$

injektiv:

$$\text{Anta } \phi(m_1) = \phi(m_2)$$

$$\text{Da er } a^{m_1} = a^{m_2}$$

$$\text{Anta } m_1 \leq m_2$$

Da har vi

$$a^{-m_1} * a^{m_1} = a^{-m_1} * a^{m_2}$$

$$\Rightarrow a^0 = a^{m_2 - m_1}$$

$$\Rightarrow e = a^{m_2 - m_1}$$

men da er $m_2 - m_1 = 0$ i $\mathbb{Z}_n$

$$\text{Så får vi } m_1 = m_2$$

Så ϕ er injektiv

surjektiv:

$$\text{Gitt } a^m \in G, \text{ har vi } \phi(m) = a^m$$

Så ϕ er surjektiv

Siste egenskap:

Gilt $a^{m_1}, a^{m_2} \in G$

$$\phi(m_1 + m_2) = a^{m_1 + m_2} = a^{m_1} * a^{m_2}$$

Så ϕ er en isomorf:

Dermed $G \cong \mathbb{Z}_n$



Oppgave 2.

Vis at gruppen

$$R(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

med matrisemultiplikasjon

er isomorf med

$$\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

med vanlig multiplikasjon
av komplekse tall.

Basis

Merk først at

$$\mathbb{T} = \{ e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R} \}$$

Definer $\phi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}(\theta)$

$$\text{ved } \phi(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Surjektivitet er trivielt at vise.

injektivitet:

$$\text{Antag } \phi(e^{i\theta_1}) = \phi(e^{i\theta_2})$$

$$\text{hvor } \theta_1 \geq \theta_2$$

Da er

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Det giver

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 \quad \text{og} \quad \cos \theta_1 = \cos \theta_2$$

som betyr at $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$.

Da er $e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_2 + 2\pi n)} = e^{i\theta_2}$

Så ϕ er injektiv.

Siste egenskap:

Vi har

$$\begin{aligned}\phi(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}) &= \phi(e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= \phi(e^{i\theta_1}) \phi(e^{i\theta_2})$$

Så ϕ er en isomorfi

Dermed $\mathbb{R}(\theta) \simeq \mathbb{T}$



Oppgave

Vis at $\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1 \}$
er en Gruppe når vi betrakter
matrise multiplikasjon.