Residyregning

$\boxed{1}$

$n \geq 0$

Regn ut $\displaystyle\int_{C_1(0)} z^n e^{1/z}\, dz$ hvor $C_1(0)$ er den positivt orienterte enhetssirkelen.

Merk at $z^n e^{1/z}$ har en singularitet i origo. Vi finner Laurentrekka av $z^n e^{1/z}$ om $z=0$.

Vi har at $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Dermed

$$z^n e^{1/z} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k}}{k!}$$

$$= \sum_{m=n}^{-\infty} \frac{z^m}{(n-m)!}$$

$m = -1$ gir $a_{-1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$

Dermed

$$\underline{\underline{\int_{C_1(0)} z^n e^{1/z}\, dz = 2\pi i \frac{1}{(n+1)!}}}$$

2

Regn ut

$f(z)$

$$\int_{C_3(0)} \frac{z}{z^2 - 3 + 4i}\, dz$$

Faktoriser nevner. Poler er kvadrat-røtter av $3-4i$.

Dette er $2-i$, $-2+i$

Merk at polene er på innsiden av $C_3(0)$.

Altså har vi

$$\int_{C_3(0)} \frac{z}{(z-2+i)(z+2-i)}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2-i} f + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+i} f$$

Vi regner ut residyene

$$\operatorname*{Res}_{z=2-i} f = \lim_{z \to 2-i} \frac{\cancel{(z-2+i)}\, z}{\cancel{(z-2+i)}(z+2-i)}$$

$$= \frac{2-i}{4-2i} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2+i} f = \lim_{z\to -2+i} \frac{\cancel{(z+2-i)}\, z}{(z-2+i)\cancel{(z+2-i)}}$$

$$= \frac{-2+i}{-4+2i} = \frac{1}{2}.$$

Her brukte vi at for en enkel pol gjelder

$$\operatorname*{Res}_{z\to z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

Sammenlagt får vi

$$\int_{C_3(0)} \frac{z}{z^2-3+4i}\, dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{2\pi i}}$$

Laplace i polarkoordinater.

Vis at

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

La u være en funksjon

$u(x, y)$.

Definer $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

Vil vise at

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(u(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)$$

$$= \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ \sin\theta\left(\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(u(r\cos\theta, r\sin\theta) \right)$$

$$= -r\sin\theta \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta \frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$= -r\cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + r^2\sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$- r^2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - r\sin\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$- r^2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Legger sammen alt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} =$$

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+ 2(\cancel{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{r}(\cancel{\cos\theta - \cos\theta})\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\frac{1}{r}\cancel{(\sin\theta - \sin\theta)}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= \Delta u$$

8

Maksverdisats for harmoniske funksjoner

La u være harmonisk på et begrenset sammenhengende område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Videre u er kontinuerlig på $\overline{\Omega}$.

Da har vi at u oppnår maks og min på $\partial\Omega$.

Bevis:

Anta u oppnår maks på $x \in \Omega$. Siden Ω er åpen, finnes en ball av radius r slik at $B_r(x) \subset \Omega$.

Ved middelverdisetningen har vi

$$u(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy$$

Siden u er kontinuerlig og $u(x) \geq u(y)$ i $B_r(x)$, så er eneste mulighet at $u(y) = u(x)$ i hele $B_r(x)$.

Men dette holder for alle r slik at $B_r(x) \subset \Omega$. Siden Ω er sammenhengende får vi at $u(y) = u(x)$ i hele Ω.

Siden u er kontinuerlig i $\bar{\Omega}$, har vi dermed at

$$u(y) = u(x) \quad \forall y \in \bar{\Omega}.$$

Dermed oppnår u alltid maksverdi på randen.

Samme type argument for minimum.

Karakteristikk metoden

Løs

$$u_t + x u_x = u$$

med $u(0,x) = x^2$

La $z(t) = u(t, y(t))$.

Det gir

$$z'(t) = u_t(t, y(t)) + y'(t)\, u_x(t, y(t))$$

Dermed får vi systemet

$$z'(t) = z(t) \Rightarrow z(t) = z(0)\, e^t = y_0^2 e^t$$

$$y'(t) = y(t) \Rightarrow y(t) = y(0)\, e^t = y_0 e^t$$

Dermed gitt et punkt (t,x), så er tilhørende karakteristikk gitt ved

$y_0 = x e^{-t}$, og verdien i punktet er

$$u(t,x) = z(t; y_0) = (x e^{-t})^2 e^t = x^2 e^{-t}$$

Dermed $\underline{\underline{u(t,x) = x^2 e^{-t}}}$

Stokes / Divergens

6) Regn ut $\int_C F \cdot T \, dr$ når

$F(x,y,z) = (xe^{z^2}, x+yz, 1)$ og C er skjæringskurven mellom flaten $x^2+y^2+z^3=3$ og kjegleflaten $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

C er positivt orientert sett ovenfra

Løsning

Viser først at C ligger i planet $z=1$. For skjæringskurven C får vi

$$x^2+y^2+z^3-3 = -2z + x^2+y^2$$

$$\Rightarrow z^3+2z-3 = 0$$

$$(z-1)\underbrace{(z^2+z+3)}_{} = 0$$

↳ negativ diskriminant
Bare reell løsning $z=1$

$\Rightarrow z=1$ på kurven C.

Dermed er C gitt ved $\frac{x^2+y^2}{2} = 1$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 2$$

Vi kan dermed bruke $\Sigma = D(0, \sqrt{2})$ disken med radius $\sqrt{2}$.
Da har vi $\partial\Sigma = C$

stokes gir at

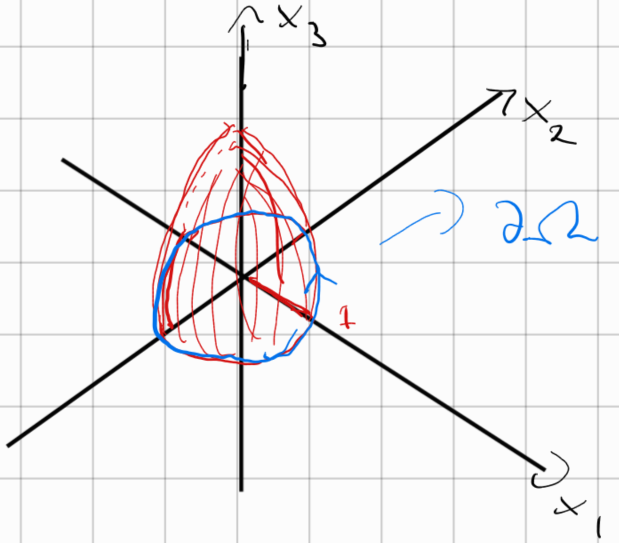
$$\oint_C F \cdot T\,dr = \iint_\Sigma \nabla \times F \cdot (0,0,1)\,dS$$

$$= \iint_\Sigma \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dS$$

$$= \iint_\Sigma dS = (\sqrt{2})^2 \pi = \underline{\underline{2\pi}}$$

Stokes 2

La Ω være den delen av ellipsoiden $x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{x_3 - 1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2 = 9$ hvor $x_3 \geq 0$



$\partial\Omega : r(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$
$t \in [0, 2\pi)$

La $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 x_3 - 5x_2^3 \cos x_3,\ 5x_1^3 e^{x_3},\ 6x_1 x_2 e^{|\bar{x}|^2}\right)$$

Regn ut $\iint_{\Omega} (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS$

Løsning:

vi bruker stokes.

$$\iint_{\Omega} (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_{\partial\Omega} F \cdot T\, dr$$

Merk at

$$F(r(t)) = (-5 \cdot \sin^3(t), 5 \cdot \cos^3 t, 6 \sin(t)\cos(t) e)$$

$$= (-5 \cdot \sin^3(t), 5 \cdot \cos^3 t, 3 \sin(2t) e)$$

Det gir

$$\iint_{\Omega} (\nabla \times F) \circ \hat{n} \, dS = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \circ \dot{r}(t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-5\sin^3 t, 5\cos^3 t) \circ (-\sin(t), \cos(t)) \, dt$$

$$= 5 \int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t \, dt$$

$$= 5 \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4t) \, dt$$

$$= 5 \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{2}\pi}}$$

$$\sin^4 t + \cos^4 t$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2(2t)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2(2t)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4t)\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4t)$$