

Hva er en gruppe?

En gruppe er en mengde $G \neq \emptyset$ utstyrt med en binær operasjon

$$* : G \times G \rightarrow G \text{ slik at}$$

(Lukket under $*$)

$$\rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G \quad (\text{assosiativitet})$$

$$\rightarrow \exists e \in G \text{ s.t. } e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$$

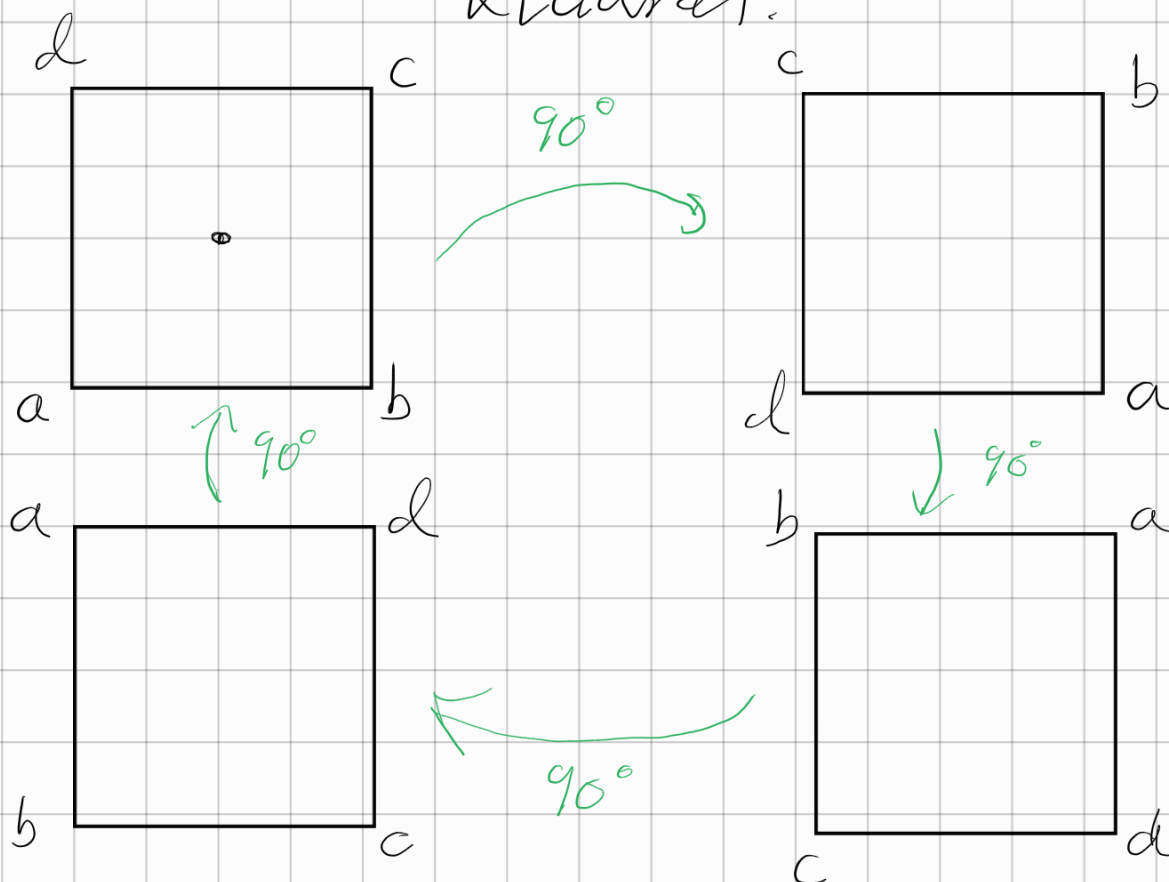
(neutralt element)

$$\rightarrow \forall a \in G \exists b \in G \text{ s.t. } a * b = b * a = e$$

(invers)

Eksempel: Rotasjonsgruppen til et
kvadrat.

symmetri



Rotasjonsgruppen består av fire elementer

$$G = (\text{id}, r_{90}, r_{180}, r_{270}).$$

Dette oppfyller åpenbart gruppekravene

- Sammensetning av rotasjonene gir en ny rotasjon. Feks: $r_{90} * r_{180} = r_{270}$

= assosiativitet.

$$\text{feks: } r_{90} * (r_{180} * r_{270}) = r_{90} * r_{90} = r_{180}$$

$$(r_{90} * r_{180}) * r_{270} = r_{270} * r_{270} = r_{180}$$

- Nøytralt element $\text{id} = r_0$

- Invers element: $r_{90} * r_{270} = \text{id}$

$$\text{id} * \text{id} = \text{id}$$

Merke at:

$$r_{180} * r_{180} = \text{id}$$

$$r_{90} = r_{90}$$

$$r_{180} = r_{90} * r_{90}$$

$$r_{270} = r_{90} * r_{90} * r_{90}$$

$$\text{id} = r_{90} * r_{90} * r_{90} * r_{90}$$

Vi sier derfor at G er en syklisk gruppe generert av r_{90} .

Alle rotasjoner er laget ved å gjenta r_{90} et antall ganger.

Vi ønsker å generalisere dette til kontinuerlig rotasjon, som også har gruppestruktur.

Betrakt rotasjon om en akse y med vinkel Θ . Åpenbart holder gruppekravene her også.

I det kontinuerlige tilfelle er det derimot ikke så lett å tenke på en generator. Dette skal vi se på nå.

1]

$$y \times x = Sx = \begin{pmatrix} y_2 x_3 - x_2 y_3 \\ -(y_1 x_3 - x_1 y_3) \\ y_1 x_2 - x_1 y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Her er } S = [y]^\times = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk: Alle 3×3 skjerssymmetriske matriser må være på formen over, og definerer derfor en entydig rotationsakse y .

$S=0$ definerer ingen akse da...

21 La R være rotasjonsmatrisen som roterer vektorer vinkelen θ rundt y .
 La $|y| = 1$. La X være en vektor.

De komponer $X = X_{||} + X_{\perp}$
 hvor $X_{||} \parallel y$ og $X_{\perp} \perp y$.

Merk at $X_{||} = (X \cdot y)y$
 Dermed

$$X_{\perp} = X - X_{||} \quad (a \times b) \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c)$$

$$= (y \cdot y)X - (X \cdot y)y$$

$$= -y \times (y \times X)$$

$$= -S^2(y)X$$

$$\left(y \times \overset{-1}{X \times y} \right)$$

Merk: $y, X_{\perp}$ og $y \times X$
 skaper en høyrehånds ortogonal
 basis.

$$X_{\perp}^{(rot)} = \cos(\theta) X_{\perp} + \sin \theta y \times X$$

$$X_{||}^{(rot)} = X_{||}$$

Sammenlagt for $\mathbf{v}$

$$\mathbf{X}^{(\text{Rot})} = \mathbf{X}_{\perp}^{(\text{Rot})} + \mathbf{X}_{\parallel}^{(\text{Rot})}$$

$$= \mathbf{X}_{\parallel} + \cos\Theta \mathbf{X}_{\perp} + \sin\Theta \mathbf{y} \times \mathbf{X}$$

$$= (\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\perp}) - \cos\Theta S^2(\mathbf{y}) \mathbf{X} + \sin\Theta S(\mathbf{y}) \mathbf{X}$$

$$= \mathbf{X} + S^2(\mathbf{y}) \mathbf{X} - \cos\Theta S^2(\mathbf{y}) \mathbf{X} + \sin\Theta S(\mathbf{y}) \mathbf{X}$$

$$= (\mathbf{I} + \sin\Theta S(\mathbf{y}) + \underbrace{(1 - \cos\Theta) S^2(\mathbf{y})}_{R(\Theta)}) \mathbf{X}$$

3)

Vi vil vise at $e^{\Theta S(y)} = R(\Theta)$.

Brøker $e^{\Theta S(y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Theta^n S(y)^n}{n!}$

Merk: $S^3(y) = -S(y)$ og $S^4(y) = -S(y)^2$

Odde ledd:

$$\Theta S + \frac{\Theta^3 S^3}{3!} + \frac{\Theta^5 S^5}{5!} + \dots$$

$$= \Theta S - \frac{\Theta^3 S}{3!} + \frac{\Theta^5 S}{5!} + \dots$$

$$= \left(\Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} + \dots \right) S(y) = \sin \Theta S(y)$$

Partall ledd

$$= \left(I + \frac{\Theta^2 S^2}{2!} + \frac{\Theta^4 S^4}{4!} + \dots \right)$$

$$= \left(I + \frac{\Theta^2 S^2}{2!} - \frac{\Theta^4 S^2}{4!} + \frac{\Theta^6 S^2}{6!} - \dots \right)$$

$$= I + (1 - \cos \Theta) S^2(y)$$

Dermed

$$e^{\Theta S(y)} = I + \sin \Theta S(y) + (1 - \cos \Theta) S^2(y)$$

Vi har dermed at

$$R(\theta) = e^{\theta S(\mathfrak{g})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\theta}{n} S(\mathfrak{g}) \right)^n$$

Vi tolker høyresiden som at enhver rotasjon $R(\theta)$ består av å gjenta en infinitesimal rotasjon $I + \frac{\theta}{n} S(\mathfrak{g})$ ($n \rightarrow \infty$) uendelig mange ganger.

Dette kan vi nå tolke som en analogi til generatoren for sirkulære rotasjoner. Vi så istad. Det er derfor man ofte sier at rotasjon er generert av skjerssymmetriske matriser.

En annen måte å se det på er å betrakte en rotasjon med $\frac{\theta}{n} \approx 0$

$$R\left(\frac{\theta}{n}\right) h \approx h + \frac{\theta}{n} (\mathfrak{g} \times h) = \left(I + \frac{\theta}{n} S(\mathfrak{g}) \right) h$$

Dermed sier vi at operatoren

$$h \mapsto \mathfrak{g} \times h \quad "S(\mathfrak{g})" \quad \text{generer rotasjon}$$

Teknisk sett er det mer presise definisjoner som inngår her. De interesserte kan lese om Lie-grupper og Lie-algebraer.

41

$$\partial V = \frac{1}{2}(\underbrace{\partial V + \nabla V}) + \frac{1}{2}(\underbrace{\partial V - \nabla V})$$

symmetrisk siden

$$(\partial V + \nabla V)^T = \partial V^T + \nabla V^T = \nabla V + \partial V$$

skjersymmetrisk siden

$$\begin{aligned} (\partial V - \nabla V)^T &= \partial V^T - \nabla V^T \\ &= \nabla V - \partial V \\ &= -(\partial V - \nabla V) \end{aligned}$$

Første ordens tilnærming

$$\begin{aligned} V(t, x+h) &\approx V(t, x) + \partial_x V(x, t)h \\ &= V(t, x) + \frac{1}{2}(\partial V + \nabla V)h + \frac{1}{2}(\partial V - \nabla V)h \end{aligned}$$

- $V(t, x)$ konstante delen er hastighetsfeltet som reiser forbi x .

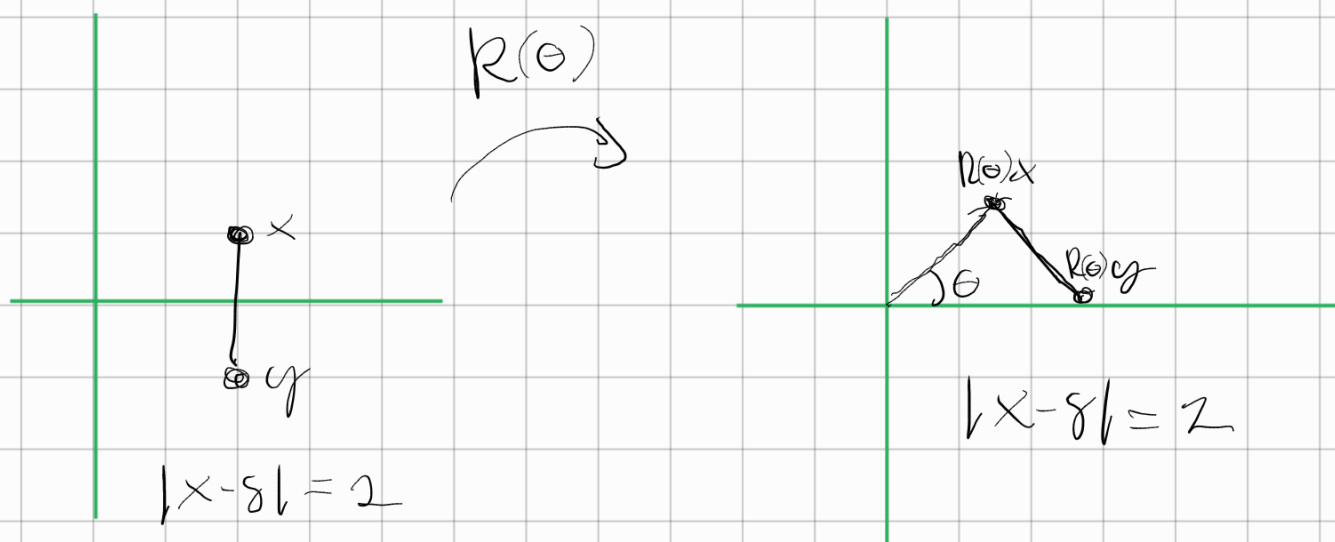
Vi ser nå nærmere på $\frac{1}{2}(\partial V - \nabla V)$
En kan vise at

$$\frac{1}{2}(\partial V - \nabla V)h = \frac{1}{2} \nabla \times (V \times h)$$

Sammenligner vi med $\Theta(\gamma \times h) = \Theta S(\gamma)h$

blir $\nabla \times V$ rotasjonsaksen og $\frac{1}{2}|\nabla \times V|$ rotasjonshastigheten.

5] Rige / isometriske afbildninger
er distancebevarende afbildninger
Rotationer er et tydeligt eksempel



Rotationsmatriser har
egenskaberne

$$R^T R = I \quad \text{og} \quad \det(R) = 1$$

Vi bruger den første til at vise at
rotationer er rige afbildninger.

$$\begin{aligned} \|R(x-x')\|^2 &= (R(x-x'))^T (R(x-x')) \\ &= (x-x')^T R^T R (x-x') \\ &= \|x-x'\|^2 \end{aligned}$$



6) La A være skjøersymmetrisk

$$\text{Da har } x(t) = e^{At} x_0 = e^{tS(\gamma)} x_0$$

Strømlinjene er sirkler i planet
utviklet på y .

7)

A symmetrisk forteller oss hvordan
partiklene forflytter seg i forhold til
hverandre.

La oss se på vektorfeltet

$$\dot{x} = Ax$$

Vi kan diagonalisere

$$A = P \Lambda P^T$$

der $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ og $\lambda_i \in \mathbb{R}$

P er en ortogonal matrise.

Dette følger av spektralteoremet
for symmetriske matriser.

$$y = P^T x$$

$$\dot{y} = P^T \dot{x} = P^T A x = P^T A P P^T x = P^T A P y = \Lambda y$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} y_0$$

Ved å bruke $X(t) = P y(t)$
 $\Leftrightarrow y_0 = P^T X_0$

Vi får

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} P^T X_0$$

Tolkning:

Partikler beveger seg innover eller utover fra origo

→ Tøying/kompresjon langs egenvektorer. Ikke en n'igil avbildning.

